

# The Non-linear Stochastic Wave Equation in High Dimensions: Existence, Hölder-continuity and Itô-Taylor Expansion

THÈSE N° 4265 (2008)

PRÉSENTÉE LE 16 DÉCEMBRE 2008

À LA FACULTE SCIENCES DE BASE

CHAIRE DE PROBABILITÉS

PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Daniel CONUS

acceptée sur proposition du jury:

Prof. S. Morgenthaler, président du jury

Prof. R. Dalang, directeur de thèse

Prof. T. Mountford, rapporteur

Prof. F. Russo, rapporteur

Prof. M. Sanz-Solé, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse  
2008

# Résumé

Le sujet principal de cette thèse est l'étude de l'équation des ondes stochastique non-linéaire, perturbée par un bruit Gaussien spatialement homogène et blanc en temps, dans le cas où la dimension de l'espace est strictement plus grande que 3. Nous nous intéressons en particulier aux questions d'existence et d'unicité de solutions, de même qu'aux propriétés de ces solutions, comme l'existence de moments d'ordre élevé et la continuité hölderienne.

L'équation des ondes stochastique est formulée sous forme intégrale. Dans celle-ci apparaissent des intégrales stochastiques par rapport à des mesures martingales (au sens de J.B. Walsh). Comme, en dimension strictement plus grande que 3, la solution fondamentale de l'équation des ondes n'est ni une fonction, ni une mesure positive, mais une distribution de Schwartz au sens large, nous développons tout d'abord une extension de l'intégrale stochastique de Dalang-Walsh qui permet d'intégrer une large classe de distributions de Schwartz. Sous une hypothèse déjà utilisée dans la littérature sur la mesure spectrale du bruit, cette classe contient la solution fondamentale de l'équation des ondes.

A l'aide de cette extension de l'intégrale stochastique, nous pouvons établir l'existence d'un champ aléatoire de carré intégrable, solution de l'équation des ondes stochastique non-linéaire, quelle que soit la dimension de l'espace. Cette solution est unique au sein d'une classe restreinte de processus.

Dans le cas d'un bruit multiplicatif affine, nous obtenons une représentation en série de la solution et des estimations sur les moments d'ordre  $p$  ( $p \geq 1$ ). A partir de là, sous des hypothèses standard, nous pouvons déduire la continuité hölderienne de la solution. L'ordre de continuité que nous obtenons est optimal.

Dans le cas d'un bruit multiplicatif au sens large, nous mettons en place un cadre permettant de travailler avec des intégrales stochastiques itérées appropriées, afin de déduire un développement limité d'Itô-Taylor pour la solution de l'équation des ondes stochastique. La convergence de ce développement est un problème ouvert. C'est pourquoi nous terminons par quelques remarques qui donnent à penser qu'il peut être possible d'obtenir une série d'Itô-Taylor pour la solution.

**Mots-clés :** mesure martingale, intégration stochastique, équation des ondes stochastique, équation aux dérivées partielles stochastique, expression pour les moments, continuité hölderienne, intégrales stochastiques itérées, développement d'Itô-Taylor.

# Abstract

The main topic of this thesis is the study of the non-linear stochastic wave equation in spatial dimension greater than 3 driven by spatially homogeneous Gaussian noise that is white in time. We are interested in questions of existence and uniqueness of solutions, as well as in properties of solutions, such as existence of high order moments and Hölder-continuity properties.

The stochastic wave equation is formulated as an integral equation in which appear stochastic integrals with respect to martingale measures (in the sense of J.B. Walsh). Since, in dimensions greater than 3, the fundamental solution of the wave equation is neither a function nor a non-negative measure, but a general Schwartz distribution, we first develop an extension of the Dalang-Walsh stochastic integral that makes it possible to integrate a wide class of Schwartz distributions. This class contains the fundamental solution of the wave equation, under a hypothesis on the spectral measure of the noise that has already been used in the literature.

With this extended stochastic integral, we establish existence of a square-integrable random-field solution to the non-linear stochastic wave equation in any dimension. Uniqueness of the solution is established within a specific class of processes.

In the case of affine multiplicative noise, we obtain a series representation of the solution and estimates on the  $p$ -th moments of the solution ( $p \geq 1$ ). From this, we deduce Hölder-continuity of the solution under standard assumptions. The Hölder exponent that we obtain is optimal.

For the case of general multiplicative noise, we construct a framework for working with appropriate iterated stochastic integrals and then derive a truncated Itô-Taylor expansion for the solution of the stochastic wave equation. The convergence of this expansion remains an open problem, so we conclude with some remarks that suggest an Itô-Taylor series expansion for the solution.

**Keywords :** martingale measures, stochastic integration, stochastic wave equation, stochastic partial differential equations, moment formulae, Hölder continuity, iterated stochastic integrals, Itô-Taylor expansion.

# Contents

Acknowledgements	iii
Résumé	v
Abstract	vii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Framework</b>	<b>7</b>
2.1 Walsh's martingale measure stochastic integral . . . . .	7
2.2 Spatially homogeneous noise as a martingale measure . . . . .	16
2.3 Extension to non-negative Schwartz distributions . . . . .	18
<b>3 Stochastic integration : further extension</b>	<b>23</b>
3.1 Extension to more general Schwartz distributions . . . . .	23
3.2 Extension in deterministic integrals . . . . .	29
<b>4 Application to SPDE's</b>	<b>33</b>
4.1 Existence and uniqueness for a class of SPDE's . . . . .	33
4.2 The case of the non-linear wave equation . . . . .	44
<b>5 The case of affine multiplicative noise</b>	<b>47</b>
5.1 Moments of order $p$ of the solution ( $p > 2$ ) . . . . .	48
5.2 Hölder continuity . . . . .	58
<b>6 Iterated Stochastic Integrals</b>	<b>69</b>
6.1 Multi-indices . . . . .	69
6.2 Iterated integral processes . . . . .	73
6.3 Products of iterated stochastic integrals . . . . .	88
6.4 Expectation and moments of iterated stochastic integrals . . . . .	103

---

<b>7 Itô-Taylor expansion</b>	<b>111</b>
7.1 Truncated Itô-Taylor expansion . . . . .	111
7.2 Remarks on the asymptotic behavior of the Itô-Taylor expansion . .	118
<b>Bibliography</b>	<b>125</b>
<b>Curriculum Vitae</b>	<b>129</b>