

Stabilization Strategies for Discontinuous Galerkin Methods

THÈSE N° 4135 (2008)

PRÉSENTÉE LE 11 JUILLET 2008

À LA FACULTE SCIENCES DE BASE

CHAIRE DE MODÉLISATION ET CALCUL SCIENTIFIQUE

PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Benjamin STAMM

M.Sc en mathématiques EPF (ing. math. dipl. EPF)
de nationalité suisse et originaire de Schleithem (SH)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. J. P. Buser, président du jury
Prof. A. Quarteroni, Prof. E. Burman, directeurs de thèse
Prof. J. Hesthaven, rapporteur
Dr M. Picasso, rapporteur
Prof. C. Schwab, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2008

Abstract

The subject of this thesis is the analysis of discontinuous Galerkin methods for linear partial differential equations of first or second order.

Discontinuous Galerkin methods are known to satisfy a local mass conservation property. Taking a closer look one can observe that this property often depends on the method itself, i.e. on some method-dependent parameters. The main objective of this work is to design discontinuous Galerkin schemes satisfying a method-independent local mass conservation property still ensuring full stability and optimal convergence of the approximations.

Depending on the problem and the choice of the approximation space, the strategy to reach this goal might be different. We give a precise characterization of what type of stabilization term is needed in order to obtain a stable and optimally convergent numerical scheme. Both high order and low order approximation spaces are treated. We present strategies for the scalar hyperbolic, first and second order elliptic, parabolic problems and the Stokes equations. In each case we establish an analysis proving stability and optimal convergence of the approximations. Some numerical examples illustrate the theoretical results.

Keywords: Discontinuous Galerkin method, interior penalty, stabilization, local conservation properties

Version abrégée

Cette thèse traite de l'analyse de la méthode de Galerkin discontinue pour des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.

Les méthodes de Galerkin discontinues sont connues pour satisfaire une propriété de conservation de masse locale. En regardant de plus près, on remarque que cette propriété dépend souvent du schéma considéré et de ses paramètres spécifiques. L'objectif principal de ce travail est de développer des méthodes de Galerkin discontinues qui satisfont une propriété de conservation de masse locale indépendante du schéma, tout en assurant la stabilité et la convergence optimale des approximations.

La stratégie pour atteindre ce but peut être différente selon le problème et l'espace d'approximation considérés. Nous considérons d'abord des espaces d'approximation d'ordre bas, puis d'ordre élevé dans le cadre des problèmes hyperboliques, elliptiques du premier et du second ordre, paraboliques et de Stokes. Dans chaque cas, nous donnons une caractérisation de la stabilisation nécessaire pour établir la stabilité et la convergence optimale des approximations. Des exemples numériques illustrent les résultats théoriques.

Mots clés: Méthode de Galerkin discontinue, pénalisation intérieure, stabilisation, propriétés de conservation locales

Zusammenfassung

Die vorliegende Doktorarbeit befasst sich mit der Analysis der diskontinuierlichen Galerkin-Methode für die Lösung linearer partieller Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung.

Die diskontinuierliche Galerkin-Methode ist bekannt für die Eigenschaft der lokalen Massenerhaltung. Genauer betrachtet kann man jedoch bemerken, dass diese Eigenschaft von der jeweiligen Methode abhängt, d.h. von den methodenspezifischen Parametern. Die Zielsetzung dieser Arbeit ist der Entwurf diskontinuierlicher Galerkin-Schemata, die eine methodenunabhängige und lokale Massenerhaltungseigenschaft aufweisen, zugleich aber immer noch stabil und optimal konvergent sind.

Die Strategie um dieses Ziel zu erreichen kann von Problem und Annäherungsraum abhängig unterschiedlich ausfallen. Es wird hier eine präzise Beschreibung der erforderlichen Stabilisierung für stabile und optimal konvergente Schemata gegeben. Zuerst werden Annäherungen niedriger Ordnung, danach Annäherungen höherer Ordnung betrachtet. Verschiedene Strategien für skalare hyperbolische Probleme, elliptische Probleme erster und zweiter Ordnung, parabolische Probleme und das Stokes-Problem werden präsentiert. In all diesen Fällen wird die Stabilität und die optimale Konvergenz der Annäherung geprüft. Numerische Beispiele illustrieren die jeweiligen theoretischen Resultate.

Schlagwörter: Diskontinuierliche Galerkin-Methode, Interior penalty, Stabilisierung, lokale Erhaltungseigenschaften

Contents

Introduction	1
Preliminaries	9
1.1 Triangulation	9
1.2 Sobolev spaces	10
1.3 Average and jump operators	11
1.3.1 Integration by parts	12
1.4 Standard finite element spaces	12
1.5 Standard projection and interpolation operators	13
1.5.1 Local discontinuous L^2 -projection	13
1.5.2 Global continuous L^2 -projection	13
1.5.3 Local discontinuous L^2 -projection onto the skeleton	14
1.5.4 Crouzeix-Raviart interpolation	14
1.5.5 Clément interpolation	14
1.5.6 Oswald interpolation	15
1.6 Some technical lemmas	15
I HIGH ORDER METHODS	17
2 Hyperbolic problems	19
2.1 The model problem	19
2.2 Continuous and discontinuous Galerkin methods with interior penalty	21
2.2.1 Basic results	21
2.2.2 Combining continuous and discontinuous finite element spaces	23
2.3 Relation between the continuous and the discontinuous Galerkin method	24
2.3.1 The continuous method as a limit of the discontinuous method	24
2.3.2 Local flux conservation	26
2.3.3 Numerical results	30
2.4 Discontinuous Galerkin method with reduced penalization	33
2.4.1 A projection operator	34
2.4.2 A discontinuous finite element method with reduced penalization	35
2.4.3 Convergence analysis	36
2.4.4 Analysis of the projection operator	44
2.4.5 Numerical results	51
2.5 Conclusion	54

3	First order elliptic problems	57
3.1	Model problem	57
3.2	Discontinuous Galerkin method with reduced penalization	58
3.2.1	A projection operator	58
3.2.2	A discontinuous finite element method with reduced penalization	60
3.2.3	Convergence Analysis	62
3.2.4	Existence of local projection	67
3.2.5	Numerical results	68
3.3	Conclusions	69
4	Second order elliptic problems	71
4.1	Model problem and definitions	72
4.2	hp -Optimal discontinuous Galerkin method	74
4.2.1	Stability analysis	75
4.2.2	Convergence analysis	78
4.3	Numerical results	82
4.4	Conclusions	82
II	LOW ORDER METHODS	87
5	Second order elliptic problems	89
5.1	Model problem	90
5.2	Reduced interior penalty discontinuous Galerkin method	90
5.2.1	Splitting of the piecewise linear finite element space	91
5.2.2	Poincaré inequalities	94
5.2.3	Discontinuous Galerkin formulation	98
5.2.4	Stability analysis	99
5.2.5	Convergence analysis	102
5.2.6	Numerical results	105
5.3	Bubble stabilized discontinuous Galerkin method	107
5.3.1	Bubble enriched finite element space	108
5.3.2	Projections operators	110
5.3.3	Discontinuous Galerkin formulation	113
5.3.4	Stability analysis	113
5.3.5	Convergence analysis	115
5.3.6	A posteriori estimates	118
5.3.7	Numerical results	124
5.4	Conclusions	128
6	Parabolic problems	131
6.1	Model problem	131
6.2	Bubble stabilized discontinuous Galerkin method	131
6.2.1	Stability analysis	132
6.2.2	Convergence analysis	134
6.2.3	Numerical results	136
6.3	Conclusions	138

7 Stokes problem	141
7.1 Model problem	141
7.2 Bubble stabilized discontinuous Galerkin method	142
7.2.1 Properties of the bubble stabilized finite element space	143
7.2.2 Stability analysis	145
7.2.3 Convergence analysis	147
7.2.4 Numerical results	150
7.3 Conclusions	152
Bibliography	157