ON CANONICAL REPRESENTATION OF CONVEX POLYHEDRA

THÈSE N^{O} 3291 (2005)

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE

Institut de mathématiques

SECTION DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Stefano PICOZZI

ingénieur physicien diplômé EPF
de nationalité suisse et italienne et originaire d'Ependes (FR)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. Th. Liebling, directeur de thèse
Prof. D. de Werra, rapporteur
Prof. K. Fukuda, rapporteur
Prof. M. Joswig, rapporteur

Lausanne, EPFL
2005

Contents

1 Introduction **2**
1.1 Main contributions . . . 8

2 Basics on representations of convex polyhedra **9**
2.1 Representations of convex polyhedra . . . 9
2.2 Redundancy within representations . . . 12
2.3 Implicit linearity of representations . . . 15
2.4 The orthogonal representations of convex polyhedra . . . 17
2.5 Polarity . . . 19

3 Canonical representation rules **23**
3.1 Canonical representation rules . . . 24
3.2 Proper canonical H-representation rules . . . 24
3.3 Proper canonical V-representation rules . . . 26
3.4 Subspace selection rules and Σ-representation rules . . . 27
3.5 The orthogonal and the lexico-smallest representation rules . . . 33

4 On the duality of canonical representation rules **37**
4.1 From the duality of cones to the duality of rules . . . 37
4.2 Homogenization and duality of rules . . . 39
4.3 The duality of Σ-representation rules and the case of the lexico-smallest representation rule . . . 42
4.4 Duality of rules via translations . . . 43

5 Computational aspects of canonical representation rules **46**
5.1 The computation of standard V-representations . . . 47
5.2 Redundancy removal . . . 49
5.3 Implicit-linearity removal . . . 51
5.4 Computational aspects of subspace selection rules . . . 53
5.4.1 Projection of vectors onto complementary subspaces . . . 53
5.4.2 The orthogonal representation rule . . . 55
5.4.3 Lexico-smallest representation rule . . . 56
5.5 Binary sizes of representations . . . 58
5.6 Numerical experiments on the sizes of representations . . . 59

6 On the complexity of polyhedral verification problems **65**

6.1 Linear and quadratic equivalence of problems . . . 65

6.2 Polyhedral verification problems . . . 67

6.3 Linear reductions of problems to Feasibility . . . 70

6.4 On the complexity of computing proper representations . . . 74

6.4.1 The H-IMPLICIT-LINEARITY REMOVAL problem . . . 75

6.4.2 The H-REDUNDANCY REMOVAL problem . . . 78

6.4.3 Removal problems for V-representations . . . 79

7 Perfect bipartite matching polytope **80**

7.1 Proper H-representations of perfect bipartite matching polyhedra . . . 81

7.2 Lexico-smallest and orthogonal representations of perfect matching polyhedra 83

Abstract

Convex polyhedra are important objects in various areas of mathematics and other disciplines. A fundamental result, known as Minkowski-Weyl theorem, states that every polyhedron admits two types of representations, either as the solution set to a finite system of linear inequalities or the Minkowski sum of a finite set of points and half-rays. These are usually referred to as its H-representations and its V-representations, respectively. Neither H-representations nor V-representations are unique. Hence, deciding whether two H-representations, or two V-representations describe the same polyhedron is a nontrivial problem. We identify particular representations which are easy to determine, are compact, and reflect the geometrical properties of the underlying polyhedron. Key ingredients to this discussion are affine transformations of polyhedra, duality and complexity of polyhedral decision problems.

In this dissertation, we discuss in detail the problem of refining the definitions of H- and V- representations such as to guarantee a one to one correspondence between polyhedra and their representations. As a convenient formalism, we introduce the notion of the *canonical representation rule*, which is any function assigning to each polyhedron P a particular H-representation, and a particular V-representation. The *orthogonal representation rule* is a well-known example of such a function.

We define the *lexico-smallest representation rule*, an improved canonical representation rule that produce representations which are nonredundant, make the underlying geometry transparent and, furthermore, are sparse. These rules also exhibit nice polarity properties that can be exploited for computation. The key computational tool is linear programing.

Furthermore, we show that the lexico-smallest H-representation of a perfect bipartite matching polyhedron is easy to determine using the combinatorial properties of the underlying graph.

Finally, we discuss the complexity of various polyhedral verification problems related to representation of convex polyhedra. The standard technique to identify the redundancies within an H- or a V-representation is to use linear programming. We discuss the complexity of the converse reduction. More precisely, we show that deciding the feasibility of a system of linear inequalities can be reduced to deciding redundancy in an H- or in a V- representation in linear time. Also, we will study the equivalence of these problems with those of identifying the implicit linearities within an H- or a V- representation, and the boundedness of a polyhedron.

Version abrégée

Les polyhèdres convexes sont des objets importants dans différentes branches des mathématiques et d'autres disciplines. Un résultat fondamental, attribué à Minkowski et Weyl, (voir, par ex., [7, 9]) garantit que tout polyhèdre convexe admet deux types de représentations. La première, nommée *represésentation H*, décrit un polyhèdre P comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. L'autre, appelée *représentation V* décrit P comme l'ensemble résultant de la somme de Minlowski d'un ensemble fini de points et de demi-droites. On voit aisément que ni l'une ni l'autre de ces représentations n'est unique pour tout polyhèdre. En conséquence, il est non trivial de décider si deux représentations (du même type, soit H, soit V) décrivent ou non le même polyhèdre. D'un autre côté, cette propriété des représentations H et V peut-être exploitée pour identifier des "bonnes" représentations, qui soient compactes et qui reflètent les propriétés géométriques des polyhèdres représentés.

Dans cette dissertation, nous discutons en détail le problème d'identifier, pour chaque polyhèdre P dans $\mathbb{R}^d$, une (et une seule) représentation H de P, ainsi qu'une (et une seule) représentation V de P. Pour traiter ce problème, on définira la notion de *règle canonique pour les représentations*, que l'on modélisera comme une fonction qui, à chaque polyhèdre P, fait correspondre une représntation H de P et une représentation V de P.

Notre but pricipal est de définir une règle qui soit préférable à la règle habituellement utilisée, nomée la *règle orthogonale*. En étudiant cette dernière, on déterminera un certain nombre de propriétés qui devraient être satisfaites par toute "bonne" règle. En particulier, on demandera qu'une telle règle donne des représentations non-redondantes, et qui soient telles que les propriétés géométriques du polyhèdre représenté soient aisément identifialbles. De plus, les représentations H (V, respectivement) résultantes pourront être facilement calculées à partir de n'importe quelle représentation H (n'importe quelle représentation V) en utilisant la programmation linéaire. Enfin, une telle règle reflètera la relation bien connue entre un polyhèdre et son polaire.

Nous définissons la *règle lexico-minimale*. En plus de satisfaire aux propriété ci-dessus, celle-ci est telle que les représentations qui en découlent contiennent nécessairement un certain nombre de composantes nulles. De plus, les tailles binaires des nombres nécessaires à leur encodage tendent à être plus petites que celles des nombres nécessaires à encoder les représentations définies par la règle orthogonale. Enfin, on montrera que cette règle est facile à appliquer dans le cas des représentations H du polyhèdre de couplage parfait dans les graphes bipartis.

Pour terminer, on discutera la complexité de différents problémes de décision liés aux représentations des polyhèdres. En particulier, on montrera que le problème de décider la consistance d' un système d'inégalités linéaires peut être réduit à celui de décider si un élément dans une représentation H, ou dans une représentation V, est redondant ou non en un temps linéaire. On montrera en outre l'équivalence de ces problèmes avec ceux de décider si une représentation contient des linéarités implicites, de déterminer la dimension d'un polyhèdre et celui de décider s'il est borné.