

PROPRIÉTÉS HORS ÉQUILIBRE D'UNE PAROI ADIABATIQUE

THÈSE N° 3110 (2004)

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE

Institut de théorie des phénomènes physiques

SECTION DE PHYSIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Séverine PACHE

ingénieure physicienne diplômée EPF
de nationalité suisse et originaire de Chêne-Bourg (GE)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. Ch. Gruber, directeur de thèse
Prof. G. Morriss, rapporteur
Prof. A. Lesne, rapporteur
Prof. Ch.-E. Pfister, rapporteur

Lausanne, EPFL
2004

Version abrégée

Nous étudions l'évolution d'un système composé de N particules de masse m , sans interaction et réparties dans un cylindre (de longueur L) divisé en deux récipients par un piston adiabatique de masse $M \gg m$. La longueur du cylindre est un paramètre fixé qui peut être fini ou infini (dans ce cas N est infini). Dans le cas du modèle infini, on réalise une analyse perturbative basée sur l'équation de Boltzmann, s'appuyant sur un développement de la distribution de la vitesse du piston en fonction d'un petit paramètre $\varepsilon = \sqrt{m/M}$ sans dimension. Le cas non stationnaire est résolu jusqu'à l'ordre en ε et montre que le système tend exponentiellement vite vers un état stationnaire de vitesse moyenne V . Le temps de relaxation vers cet état est proportionnel à la masse du piston ($\tau_0 = \frac{M}{A}$, A la section du piston). Il est montré, pour des pressions égales, que les collisions des particules des gaz induisent des fluctuations asymétriques dans la vitesse du piston conduisant à un mouvement macroscopique du piston dirigé du côté de plus haute température.

Ensuite, dans le cas du modèle fini et partant de l'équation de Liouville, une approche perturbative (de paramètre $\alpha = 2m/(M+m)$) reposant sur deux échelles de temps distinctes montre que l'évolution vers l'équilibre thermique procède en deux étapes. La première est une relaxation rapide, déterministe et adiabatique, vers un état d'équilibre mécanique où les pressions finales des gaz sont approximativement égales mais les températures différentes. De plus, le mouvement du piston dans cette étape est amorti plus ou moins fortement selon si le rapport $R = M_{\text{gaz}}/M$ de la masse du gaz sur la masse du piston est petit ($R < 2$) ou grand ($R > 4$). La seconde étape est beaucoup plus lente et se déroule sur des temps proportionnels à la masse du piston. C'est une évolution stochastique, induite par les fluctuations, avec transfert de chaleur jusqu'à l'équilibre thermique. L'analyse microscopique permet d'obtenir l'évolution de la position du piston par la relation $X_M(t) = L(1/2 - \xi(\alpha t))$ où la fonction ξ est indépendante de M .

L'hypothèse d'homogénéité (i.e. les valeurs des densités, pressions et températures à la surface du piston peuvent être remplacées par les valeurs moyennes de chaque récipient) introduite dans l'analyse précédente occulte le phénomène d'amortissement observé. Ce dernier s'explique par la propagation d'ondes allant et venant du piston aux murs frontières. Il faut donc pouvoir décrire les fluides

hors-équilibre entourant le piston pour étudier ce comportement. Une analyse du cas infini est alors conduite, basée sur les résultats de l'approche perturbative précédente. Dans ce cas, les conditions initiales sont fixées de telle sorte que le piston reste en moyenne à l'origine. Il est montré qu'il est possible de décrire l'évolution des fluides de telle sorte qu'elle soit en accord avec les deux lois de la thermodynamique et les relations phénoménologiques.

Finalement, une étude des gaz dans le cas fini est réalisée en considérant une vitesse constante du piston. Une telle condition et des collisions élastiques permettent de trouver une relation explicite de la distribution des fluides et par conséquent des champs hydrodynamiques. L'expression analytique de ces derniers permet de mettre en évidence la présence d'ondes de choc allant et venant du piston aux murs frontières.

Abstract

We study the evolution of a system composed of N non-interacting particles of mass m distributed in a cylinder of length L . The cylinder is separated into two parts by an adiabatic piston of a mass $M \gg m$. The length of the cylinder is a fix parameter and can be finite or infinite (in this case N is infinite). For the infinite case we carry out a perturbative analysis using Boltzmann's equation based on a development of the velocity distribution of the piston in function of a small dimensionless parameter $\varepsilon = \sqrt{m/M}$. The non-stationary case is solved up to the order ε ; our analysis shows that the system tends exponentially fast towards a stationary state where the piston has an average velocity V . The characteristic time scale for this relaxation is proportional to the mass of the piston ($\tau_0 = M/A$ where A is the cross-section of the piston). We show that for equal pressures the collisions of the particles induce asymmetric fluctuations of the velocity of the piston which leads to a macroscopic movement of the piston in the direction of the higher temperature.

In the case of the finite model a perturbative approach based on Liouville's equation (using the parameter $\alpha = 2m/(M + m)$) shows that the evolution towards thermal equilibrium happens on two well separated time scales. The first relaxation step is a fast, deterministic and adiabatic evolution towards a state of mechanical equilibrium with approximately equal pressures but different temperatures. The movement of the piston is more or less damped. This damping qualitatively depends on whether the ratio $R = M_{gas}/M$ between the total mass of the gas and the mass of the piston is small ($R < 2$) or large ($R > 4$). The second part of the evolution is much slower; the typical time scales are proportional to the mass of the piston. There is a stochastic evolution including heat transfer leading to thermal equilibrium. A microscopic analysis yields the relation $X_M(t) = L(1/2 - \xi(\alpha t))$ where the function ξ is independent of M .

Using the hypothesis of homogeneity (i.e. the values of the densities, pressures and temperatures at the surface of the piston can be replaced by their respective average values) introduced in the previous analysis the observed damping does not show up. This can be explained by shock waves propagating between the piston and the walls at the extremities of the cylinder. In order to study the behaviour of the system there is hence a need to adequately describe the non-equilibrium fluids around the piston. We carry out an analysis of the infinite case, based on the per-

turbative approach introduced earlier. In this case the initial conditions are chosen in such a manner that the piston on average stays at the origin. It is shown that it is possible to describe the evolution of the fluids in such a way that it is coherent with the two laws of thermodynamics and the phenomenological relationships.

Finally we study the case of a constant velocity of the piston in a finite cylinder. Such a condition and elastic collisions allow us to derive an explicit expression for the distribution of the fluids and hence for the hydrodynamics fields. This expression reveals the presence of shock waves between the piston and the extremities of the cylinder.

Table des matières

Introduction	1
1 Mise en contexte et Problématique	3
2 Description du système	7
2.1 Description générale du modèle	7
2.2 Simulations	9
2.3 Variation des Paramètres initiaux	9
2.3.1 Variation des configurations initiales	9
2.3.2 Variation des paramètres macroscopiques	13
I Système infini	15
3 Equation de Fokker-Planck	17
3.1 Description et conditions initiales	18
3.2 Equation de Boltzmann	19
3.3 Développement de $\Phi(V, t)$ en puissance de $\varepsilon = \sqrt{\frac{m}{M}}$	21
3.4 Changement d'échelle de la vitesse	23
3.4.1 Coefficients J_{n-q}	23
3.5 Changement d'échelle sur le temps	25
3.6 Détermination de $F_0(W, s)$	26
3.7 Résultats au premier ordre en ε	27
3.8 Détermination de $F_1(W, s)$	29
3.9 Résultats au premier ordre en ε	32
3.9.1 Pressions égales	34
3.9.2 Cas stationnaire	35
3.10 Simulations pour le système infini	36
3.10.1 Pressions égales	36
3.10.2 Pressions différentes	39
3.11 Commentaires	48
4 Modèle microscopique et deuxième loi	51
4.1 Système infini du Piston, définitions	52
4.2 Thermodynamique d'un fluide simple	53

4.3	Point de vue cinétique	56
4.4	Système infini du Piston, description des fluides	62
4.4.1	Fonctions de distribution à la surface du piston	62
4.4.2	Fonctions de distribution pour les fluides	66
4.4.3	Grandeurs thermodynamiques à la surface du piston ($\xi = 0$)	74
4.5	Entropie et irréversibilité	76
4.5.1	Entropie de Boltzmann $s_B(x, t) = s_B(\xi)$	76
4.5.2	Entropie thermodynamique $s(x, t) = s(\xi)$	77
4.6	Fluide à deux types de particules	79
4.7	Commentaires	87
II	Système fini	89
5	Évolution vers la position adiabatique	93
5.1	Système fini, définitions	93
5.2	Équation de Liouville	95
5.2.1	Fonctions de corrélations	95
5.3	Fonction de distribution de vitesse $\Phi(V)$ du piston	97
5.3.1	Vitesse moyenne et moments	97
5.4	Limite thermodynamique pour le piston	98
5.5	Propriété de factorisation à l'ordre α	101
5.6	Evolution du système à l'ordre α	104
5.7	Évolution dans la limite thermodynamique	106
5.7.1	Evolution du système infini ($L^\pm = \pm\infty$)	106
5.8	Evolution Adiabatique pour le système fini	109
5.9	Simulations	111
5.9.1	Amortissement faible ou fort	112
5.9.2	Hypothèse d'homogénéité	120
5.9.3	Équations d'évolution	128
6	Relaxation vers l'équilibre thermique	133
6.1	Variables sans dimension	136
6.1.1	Hypothèses Maxwelliennes	137
6.2	Simulations	140
6.3	Commentaires	150
7	Modèle à V constant et ondes de choc	153
7.1	Système fini, définitions	154
7.2	Evolution de la fonction de distribution $\rho(x, v; t)$	156
7.3	Décomposition en fonction de la série de chocs subis	161
7.4	Évolution des Champs	162
7.5	Système fini, applications	163
7.5.1	Détermination de V	163

7.6	Détermination des champs	165
7.6.1	Mouvement auto-similaire ($t < t_1$)	165
7.7	Estimation des temps caractéristiques	177
7.8	Mouvement pour des temps plus longs ($t > t_1$)	180
7.9	Grandeurs à la surface du piston	185
7.9.1	Mouvement pour des temps longs ($t > t_2 \simeq 3.62$)	189
7.10	Simulations	190
7.11	Commentaires	197
Conclusions		198
8	Conclusions	201
Références		207
Annexes		211
A	Fonctions $I_n(V)$, coefficients $I_{n,q}$ et coefficients J_q	211
B	Justification de (3.13)	213
C	Terme de collision	215
D	Fonction de distribution de vitesse $\Phi(V)$	217
E	Propriété de factorisation (Limite thermodynamique)	221
F	Mouvement de vitesse moyenne nulle du piston	224