

ON FRESNELETS, INTERFERENCE FRINGES, AND DIGITAL HOLOGRAPHY

THÈSE N^o 2977 (2004)

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR

Institut d'imagerie et optique appliquée

SECTION DE MICROTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Michael LIEBLING

ingénieur physicien diplômé EPF
de nationalité suisse et originaire de Greifensee (ZH)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. M. Unser, directeur de thèse
Prof. R. Dändliker, rapporteur
Dr C. Depeursinge, rapporteur
Prof. T. Fournel, rapporteur
Prof. M. Vetterli, rapporteur

Lausanne, EPFL
2004

Abstract

In this thesis, we describe new approaches and methods for reconstructing complex-valued wave fields from digital holograms. We focus on Fresnel holograms recorded in an off-axis geometry, for which operational real-time acquisition setups readily exist.

The three main research directions presented are the following. First, we derive the necessary tools to port methods and concepts of wavelet-based approaches to the field of digital holography. This is motivated by the flexibility, the robustness, and the unifying view that such multiresolution procedures have brought to many applications in image processing. In particular, we put emphasis on space-frequency processing and sparse signal representations. Second, we propose to decouple the demodulation from the propagation problem, which are both inherent to digital Fresnel holography. To this end, we derive a method for retrieving the amplitude and phase of the object wave through a local analysis of the hologram's interference fringes. Third, since digital holography reconstruction algorithms involve a number of parametric models, we propose automatic adjustment methods of the corresponding parameters.

We start by investigating the Fresnel transform, which plays a central role in both the modeling of the acquisition procedure and the reconstruction of complex wave fields. The study of the properties that are central to wavelet and multiresolution analysis leads us to derive Fresnelets, a new family of waveletlike bases. Fresnelets permit the analysis of holograms with a good localization in space and frequency, in a way similar to wavelets for images. Since the relevant information in a Fresnel off-axis hologram may be separated both in space and frequency, we propose an approach for selectively retrieving the information in the Fresnelet domain. We show that in certain situations, this approach is superior to others that exclusively rely on the separation in space or frequency.

We then derive a least-squares method for the estimation of the object wave's amplitude and phase. The approach, which is reminiscent of phase-shifting techniques, is sufficiently general to be applied in a wide variety of situations, including those dictated by the use of microscopy objectives.

Since it is difficult to determine the reconstruction distance manually, we propose an automatic procedure. We take advantage of our separate treatment of the phase retrieval and propagation problems to come up with an algorithm that maximizes a sharpness metric related to the sparsity of the signal's expansion in distance-dependent Fresnelet bases.

Based on a simulation study, we suggest a number of guidelines for deciding which algorithm to apply to a given problem. We com-



0000000001

pare existing and the newly proposed solutions in a wide variety of situations. Our final conclusion is that the proposed methods result in flexible algorithms that are competitive with preexisting ones and superior to them in many cases. Overall, they may be applied in a wide range of experimental situations at a low computational cost.



Version Abrégée

Fresnelettes, franges d'interférences et holographie digitale

Dans cette thèse, nous proposons de nouvelles approches et méthodes pour la reconstruction de champs d'ondes à valeurs complexes à partir d'hologrammes digitaux. Nous nous concentrons sur des hologrammes de type Fresnel, enregistrés dans une géométrie hors axe, pour laquelle des systèmes d'acquisition en temps réel existent actuellement.

La recherche présentée est articulée selon trois axes principaux. Premièrement, nous dérivons les outils nécessaires pour transférer des méthodes et concepts de l'approche multirésolution au domaine de l'holographie digitale. Cette démarche est motivée par la flexibilité, la robustesse et la vision unificatrice que les ondelettes ont apportées à de nombreuses applications en traitement d'images. Nous nous intéressons en particulier au traitement espace-fréquence et aux représentations concises de signaux. Deuxièmement, nous proposons de découpler les deux problèmes inhérents à l'holographie digitale de Fresnel, à savoir ceux liés à la démodulation et à la propagation. À cette fin, nous dérivons une méthode d'estimation de l'amplitude et de la phase de l'onde objet à l'aide d'une analyse locale des franges d'interférence de l'hologramme. Troisièmement, les algorithmes de reconstruction en holographie digitale étant basés sur plusieurs modèles paramétriques, nous proposons des méthodes automatiques d'ajustement des paramètres impliqués.

Nous commençons par étudier la transformée de Fresnel qui joue un rôle majeur tant dans la modélisation de la procédure d'acquisition que dans la reconstruction de champs d'ondes à valeurs complexes. L'étude des propriétés centrales à la théorie des ondelettes et de l'analyse multirésolution nous conduit à dériver les Fresnelettes, une nouvelle famille de bases de type ondelette. Les Fresnelettes permettent l'analyse des hologrammes avec une bonne localisation dans l'espace et les fréquences, comme les ondelettes pour le traitement d'images. Comme l'information encodée dans un hologramme hors axe de type Fresnel peut être séparée à la fois dans l'espace et les fréquences, nous proposons une approche pour la récupérer de manière sélective dans le domaine des Fresnelettes. Comparée à d'autres méthodes basées exclusivement sur la séparation dans l'espace ou dans le domaine des fréquences, cette approche conduit à une qualité de reconstruction supérieure dans de nombreuses situations.

Nous dérivons ensuite une méthode d'estimation par moindres carrés de l'amplitude et de la phase de l'onde objet. Cette approche, qui rappelle certaines techniques de décalage de phase, est suffisamment générale pour être appliquée dans une grande variété d'arrange-



0000000011

ments expérimentaux, y compris ceux avec un objectif de microscope.

Comme il est difficile de déterminer la distance de reconstruction manuellement, nous proposons une procédure automatique. Notre traitement séparé des problèmes d'estimation de phase et de propagation nous permet de proposer un algorithme qui maximise une métrique de netteté apparentée à la capacité de représenter le signal de manière concise dans des bases de Fresnelettes dépendantes de la distance.

Enfin, nous donnons des directives pour guider le choix de l'algorithme en fonction d'un problème donné. À cet effet, nous effectuons une étude de simulation et comparons des méthodes existantes à celles nouvellement proposées dans une large palette de situations. Nous concluons que ces dernières résultent en des algorithmes à la fois flexibles et dont la qualité de reconstruction est compétitive voire en de nombreux cas supérieure à celle d'autres approches. De manière générale, ils peuvent être appliqués dans une gamme élargie de situations expérimentales tout en limitant les coûts de calcul.



Zusammenfassung

Über Fresnelets, Interferenzmuster und digitale Holographie

Vorliegende Dissertation befasst sich mit neuen Konzepten und Methoden für die Rekonstruktion komplexer Wellenfelder, ausgehend von digitalen Hologrammen. Wir beschränken uns auf Fresnelhologramme, die in einer *off-axis* Anordnung aufgenommen wurden und wofür Echtzeit Datenerfassungssysteme bereits bestehen.

Die hier vorgestellte Forschungsarbeit hat drei Hauptschwerpunkte. Erstens leiten wir die notwendigen Hilfsmittel her, um Methoden und Konzepte der Multiresolutionsanalyse auf das Gebiet der digitalen Holographie zu übertragen. Dieses Vorgehen wird durch die Flexibilität, Robustheit, sowie die vereinheitlichende Darstellungsweise motiviert, welche den Wavelets bereits zu zahlreichen Anwendungen in der Bildverarbeitung verholfen haben. Insbesondere interessieren wir uns für die Verarbeitung im Raum- und Frequenzbereich und für sparsame Signaldarstellungen. Zweitens schlagen wir vor, die beiden Probleme der digitalen Fresnel Holographie, nämlich das Demodulationsproblem und das Propagationsproblem, zu entkoppeln. Zu diesem Zweck leiten wir eine Methode zur Näherung der Amplitude und der Phase der Objektwelle mittels einer lokalen Analyse der Interferenzstreifen des Hologramms her. Drittens konzentrieren wir uns auf automatische Justierungsmethoden der auftretenden Parameter, zumal Holographie Rekonstruktionsalgorithmen auf mehreren parametrischen Modellen basieren.

Wir beginnen mit der Betrachtung der Fresnel Transformation, die sowohl beim Modellieren des Akquisitionsverfahrens, als auch bei der Rekonstruktion komplexer Wellenfelder eine zentrale Rolle spielt. Die Untersuchung der Eigenschaften, die für die Wavelet- und Multiresolutionsanalyse von Bedeutung sind, führt uns auf die Herleitung einer neuen Familie von Wavelet-artigen Basen: der Fresnelets. In ähnlichem Masse wie Wavelets für Bilder, ermöglichen Fresnelets die Analyse von Hologrammen mit guter Lokalisierung in Raum- und Frequenzbereich. Da die relevanten Informationen in einem Fresnel *off-axis* Hologramm sowohl im Raum-, wie auch im Frequenzbereich getrennt werden können, schlagen wir eine Methode vor, um die Information im Fresnelet Bereich selektiv wiederzugewinnen. In zahlreichen Situationen weisen wir die Überlegenheit dieses Verfahrens gegenüber anderen nach, die ausschliesslich auf der Trennung im Raum- oder Frequenzbereich beruhen.

Wir entwickeln danach eine Methode zur Schätzung der Amplitude und der Phase der Objektwelle im Sinne der kleinsten Quadrate. Das Konzept, das an gewisse Phasenverschiebungstechniken gemahnt, ist hinreichend allgemein, um in einer grossen Vielfalt von Situationen anwendbar zu sein, einschliesslich solcher, welche die An-



0000000101

wesenheit von Mikroskop Objektiven umfassen.

Da es schwierig ist die Rekonstruktionsdistanz manuell zu ermitteln, schlagen wir hierfür ein automatisches Verfahren vor. Dabei erreicht es uns zum Vorteil, dass wir die Probleme der Phasen Rekonstruktion und der Propagation separat behandeln. Dies ist nämlich Voraussetzung eines neuen Algorithmus zur Maximierung einer Schärfemetrik, die verbunden ist mit der Eigenschaft der distanzabhängigen Fresnel Basen, ein Signal mit möglichst wenig Koeffizienten darzustellen.

Schliesslich schlagen wir Richtlinien vor, zur Auswahl angemessener Algorithmen für jeweils gegebene Probleme. Dazu vergleichen wir in einer Simulationsstudie, das Verhalten von herkömmlichen und den neu vorgeschlagenen Methoden in einer Vielfalt von Situationen. Wir halten fest, dass die vorgeschlagenen Methoden zu flexiblen und rechensparsamen Algorithmen führen. Sie können in einer breiten Palette von experimentellen Situationen angewandt werden und erweisen sich in vielen Fällen den herkömmlichen überlegen.



Contents

Abstract	1
Version abrégée	3
Zusammenfassung	5
Contents	7
List of Figures	12
List of Tables	13
List of Notations	15
1 Introduction	19
1.1 Digital Off-Axis Holography	19
1.2 Motivations and Contributions	21
1.3 Related Work	22
1.3.1 Reconstructing Digital Holograms: an Overview .	22
1.3.2 Wavelet Applications and Theory in Optics	24
1.4 Organization of the Thesis	27
1.5 Conventions	28
2 Fresnelets: New Multiresolution Wavelet Bases for Digital Holography	29
2.1 Introduction	29
2.2 Fresnel Transform	31
2.2.1 Definition	31
2.2.2 Example: Gaussian Function	31
2.2.3 Two-Dimensional Fresnel Transform	32
2.3 Properties of the Fresnel Transform	32
2.3.1 Duality	33
2.3.2 Translation	33
2.3.3 Dilation	33
2.3.4 Link with the Fourier Transform	33
2.3.5 Localization Issues	33
2.4 Fresnelet Bases	35



0000000111

2.4.1	Fresnel Transform of a Riesz Basis	35
2.4.2	B-splines	36
2.4.3	Polynomial Spline Wavelets	38
2.4.4	Fresnelets	39
2.5	Implementation of the Fresnelet Transform	42
2.6	Applications and Experiments	44
2.6.1	Simulation: Propagation of a Test Wave Front	44
2.6.2	Backpropagation of a Diffracted Complex Wave	45
2.6.3	Hologram Reconstruction	45
2.7	Discussion	51
2.8	Conclusion	52
2.A	Proof of Theorem 1	53
2.B	Proof of Theorem 2	55
2.C	Proof of Theorem 3	56
2.D	Proof of Theorem 4	56
3	Nonlinear Fresnelet Approximations for Interference-Term Suppression	59
3.1	Introduction	59
3.2	Fresnel Transform and Holography	60
3.2.1	Fresnel Transform	60
3.2.2	Holography	61
3.3	Fresnelets	62
3.4	Algorithm	64
3.5	Results	66
3.6	Conclusion	67
4	Complex-Wave Retrieval From a Single Off-Axis Hologram	69
4.1	Introduction	69
4.2	Review of Existing Algorithms	70
4.2.1	Standard (Linear) Reconstruction Techniques	71
4.2.2	Other Related Techniques	72
4.3	Proposed Complex-Wave Retrieval Algorithm	73
4.3.1	Complex-Wave Retrieval Algorithm	73
4.3.2	Relation to Phase-Shifting Methods	77
4.3.3	Sampling Considerations	77
4.3.4	Variable-Window-Size Algorithm	78
4.3.5	Computational Complexity	79
4.4	Results	80
4.4.1	Phase-Retrieval Simulation	80
4.4.2	Phase Retrieval for Setups Containing a Lens	81
4.4.3	Experimental Digital Holographic Microscopy	84
4.5	Conclusion	86



5 Autofocus for Digital Fresnel Holograms that Uses a Fresnelet-Sparsity Criterion	89
5.1 Introduction	89
5.2 Existing Methods	91
5.2.1 Image Quality Functionals	91
5.2.2 Related Work	91
5.3 Sparse Image Representations	92
5.4 Fresnelets	93
5.4.1 Definition	93
5.4.2 Fresnelet-based Propagation	94
5.5 Proposed Autofocus Algorithm	95
5.5.1 Algorithm Description	95
5.5.2 Computational Complexity	96
5.6 Results and Discussion	96
5.6.1 Sparsity Illustration	96
5.6.2 Experimental Measurements	98
5.7 Conclusion	99
6 Comparisons and Conclusion	101
6.1 Introduction	101
6.2 Parameter Influence for the Reconstruction of Holograms	103
6.3 Quality Measures for Reconstructed Wave Fronts	104
6.4 Lensless Fresnel Off-Axis Holography: a Comparison	105
6.4.1 Fresnelet Pyramid Versus Chirp-Fourier Fresnel Transform	106
6.4.2 Nonuniform Amplitude	109
6.4.3 Distance and Angle	110
6.4.4 Regions of Interest	114
6.5 Digital holographic Microscopy: Comparisons	116
6.6 Synthesis	120
6.6.1 Fresnel Transforms	120
6.6.2 Digital Holography Methods	120
6.7 Conclusion and Outlook	121
6.7.1 General Conclusion	121
6.7.2 Outlook for Future Research	122
Acknowledgments	125
Bibliography	126
A Fourier Transform Properties	141
B Fresnel Transform Properties	145
C Curriculum Vitæ	147

